

УДК 510.64

**АЛГОРИТМИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ ДОПУСТИМОСТИ ПРАВИЛ ВЫВОДА В  
МОДАЛЬНОЙ ЛОГИКЕ, РАСШИРЯЮЩЕЙ K4 ШИРИНЫ НЕ БОЛЕЕ  $N$** **Мацкевич Т. М.****научный руководитель канд. ф.-м. наук, доцент Кияткин В. Р.****Сибирский федеральный университет**

При изучении логических систем кроме постулированных правил вывода применяются допустимые правила, относительно которых логика замкнута.

- Если существует алгоритм, позволяющий по любому предъявленному правилу распознать его допустимость в изучаемой логике, то такая логика называется разрешимой по допустимости.

Настоящий доклад посвящен исследованию вопроса о разрешимости по допустимости расширений системы K4 – модальной логики  $L=K4+(\bigwedge_{0 \leq i \leq n} \Diamond p_i \rightarrow \bigvee_{0 \leq i \neq j \leq m} \Diamond(p_i \wedge (p_j \vee \Diamond p_j)))$ .

Напомним, что правило вывода  $\frac{A_1(p_1, \dots, p_n), \dots, A_m(p_1, \dots, p_n)}{B(p_1, \dots, p_n)}$  называется допустимым в логике  $\lambda$ , если для любого набора формул  $c_1, \dots, c_n$  из того, что  $A_1(c_1, \dots, c_n) \in \lambda, \dots, A_m(c_1, \dots, c_n) \in \lambda$  следует, что  $B(c_1, \dots, c_n) \in \lambda$ .

- Модель  $K_n = (W_n, R_n, V_n)$ , где  $W_n$  – основное множество,  $R_n$  – бинарное отношение,  $V_n$  – означивание называется  $n$ -характеристической для логики  $\lambda$ , если  $V_n$  означает  $n$  различных переменных и для любой формулы  $\alpha$  от  $n$  переменных имеет место:  $\alpha \in \lambda \Leftrightarrow K_n \models \alpha$ .
- Означивание  $S$  на шкале  $(W_n, R_n)$  модели  $K_n$  называется формульным, если для любой  $\forall p_i \in Dom(S)$  существует формула  $\alpha_i$  такая, что  $S(p_i) = V_n(\alpha_i)$ .

Пусть  $K_n, n \in N$  – множество  $n$ -характеристических моделей. Правило  $r$  вывода  $\frac{A_1, \dots, A_m}{B}$  допустимо в логике  $\lambda$  тогда и только тогда, когда для  $\forall n \in N$  и каждого формульного означивания  $S$  переменных из  $r$  имеет место: если  $S(A_1) = W_n, \dots, S(A_m) = W_n$ , то и  $S(B) = W_n$ .

Для того, чтобы можно было пользоваться этим критерием в логике  $L$ , была сконструирована  $n$ -характеристическая модель  $\mathfrak{M}_n^\infty$ , которая строится индукцией по  $l$ , где  $l$  – номер слоя.

**Теорема 1.**

1. Модель  $\mathfrak{M}_n^\infty$  является  $n$ -характеристической для логики, расширяющей K4 ширины не более  $n$ .
2. Каждый элемент модели формульный.

Построенная  $n$ -характеристическая модель используется при доказательстве другого критерия – через редуцированную форму правила.

В расширении K4 правило  $\frac{A_1, \dots, A_m}{B}$  эквивалентно  $\frac{A_1 \& \dots \& A_m}{B}$ , поэтому можно рассматривать только однопосылочные правила вида  $\frac{A_1(p_1, \dots, p_n)}{B(p_1, \dots, p_n)}$ .

Говорят, что правило  $r$  имеет редуцированную форму, если  $\frac{\bigvee_{j=1}^n \varphi_j}{\neg \Diamond p_0}$ , где  $\varphi_j := \bigwedge_{0 \leq i \leq m} (p_i)^{k(i,j,1)} \wedge \bigwedge_{0 \leq i \leq m} (\Diamond p_i)^{k(i,j,2)}$ , где  $k(i,j,1), k(i,j,2) \in \{0,1\}$  и  $(\alpha)^0 = \alpha$  и  $(\alpha)^1 = \neg \alpha$  для любой формулы  $\alpha$ ,  $p_i$  – различные переменные и все переменные правила  $r_f$  находятся среди этих  $p_i$ .

Доказано, что любое правило  $r$  может быть приведено к редуцированной форме  $r_f$ , и при этом  $r$  семантически эквивалентно  $r_f$ . Обозначим  $D(r_f) := \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  - множество всех дизъюнктов в посылке  $r_f$ . Для каждого  $\varphi_f$  зафиксируем обозначения:

$$\Theta_1(\varphi_j) = \{pi | 0 \leq i \leq m, k(i, j, 1) = 0\}, \quad \Theta_2(\varphi_j) = \{pi | 0 \leq i \leq m, k(i, j, 2) = 0\}.$$

Построим некоторую модель  $\mathfrak{M}_X = \langle X, R, V \rangle$ , где

$$\begin{aligned} X : X &\subseteq D(r_f), \\ R : \forall \varphi_j, \varphi_k \in X (\varphi_j R \varphi_k) &\Leftrightarrow (\Theta_1(\varphi_k) \cup \Theta_2(\varphi_k)) \subseteq \Theta_2(\varphi_j), \\ V : V(pi) &= \{\varphi_j | p_j \in \Theta_1(\varphi_j)\}. \end{aligned}$$

Доказаны следующие основные теоремы:

### Теорема 2.

Если правило  $r$  в редуцированной форме не допустимо в логике, расширяющей K4 ширины не более  $n$ , то найдётся подмножество  $X$  из  $D(r_f)$ , такое, что модель  $\mathfrak{M} = \langle X, R, V \rangle$  удовлетворяет следующим условиям:

1. В  $\mathfrak{M}$  имеются рефлексивные и иррефлексивные элементы;
2. В  $\mathfrak{M}$  имеется  $\varphi_j$  такое, что  $p_0 \in \Theta_2(\varphi_j)$ ;
3. В  $\mathfrak{M}$  имеются элементы  $\varphi_s$  и  $\varphi_t$  такие, что  $\Theta_1(\varphi_s) = \Theta_2(\varphi_s)$  и  $\Theta_2(\varphi_t) = \emptyset$ ;
4. Для любого  $\varphi_j \in \mathfrak{M}$  выполняется  $\varphi_j \models_v \varphi_j$ ;
5. Для любой антицепи  $\nabla$  ширины не более  $n$  в модели  $\mathfrak{M}$  существуют:  
 $\varphi_{\nabla}^* \in \mathfrak{M}$  такой, что  $\Theta_2(\varphi_{\nabla}^*) = \Theta_1(\varphi_{\nabla}^*) \cup (\bigcup_{\varphi \in \nabla} \Theta_2(\varphi))$  и  
 $\varphi_{\nabla} \in \mathfrak{M}$  такой, что  $\Theta_2(\varphi_{\nabla}) = \bigcup_{\varphi \in \nabla} (\Theta_1(\varphi) \cup \Theta_2(\varphi))$ .

### Теорема 3.

Если для правила в редуцированной форме  $r_f$  существует подмножество  $X \subseteq D(r_f)$  такое, что модель  $\mathfrak{M}_X$  удовлетворяет условиям (1) – (5) из теоремы 2, то  $r_f$  не допустимо в логике, расширяющей K4 ширины не более  $n$ .

Из Теоремы 2 и Теоремы 3 следует основная:

### Теорема 4.

Правило в редуцированной форме допустимо в логике, расширяющей K4 ширины не более  $n$ , тогда и только тогда, когда для любого подмножество  $X \subseteq D(r_f)$  модель  $\mathfrak{M}_X$  не удовлетворяет условиям (1) – (5).

Поскольку правила  $r$  и  $r_f$  допустимы или недопустимы одновременно, то доказанная теорема даёт алгоритмический критерий допустимости для любого правила  $r$  в логике L.